

**ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ
Β. ΑΙΓΑΙΟΥ**

**ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

Εποπτεία

- 1) Πρόδρομος Π. Ελευθερίου**, Προϊστάμενος Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Β. Αιγαίου - Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03 με έδρα τη Λέσβο.
- 2) Ιωάννης Ράλλης**, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03 με έδρα τη Σάμο.

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . **Μονάδες 8**
- A2.** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f είναι κυρτή στο Δ ; **Μονάδες 4**
- A3.** Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. **Μονάδες 3**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει καμπή σε ένα σημείο x_0 και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.
- β)** Κάθε συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α, β) , έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$.
- γ)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$.
- δ)** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = x - 1$ και $h(x) = x + \frac{4}{x}$.

B1. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της g (μονάδες 3)

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $(g^{-1} \circ h)(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x}$ (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Αν $f = g^{-1} \circ h$, τότε :

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in (0, 1)$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 2)$ για το οποίο ι-

σχύει:
$$f(x_0) = \frac{2f(a) + f(2a)}{3}$$

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 4

B5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = x + 1$, $x = 1$, $x = e$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $\int_0^1 f(x) dx = e - 1$
- Η g είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- $f(x) - g'(x) = e^x - 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $g(1) - g(0) = 1$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g'(x) = 1$ έχει μια μόνο ρίζα ξ , η οποία μάλιστα ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

Γ3. Αν ξ είναι η ρίζα της εξίσωσης $g'(x) = 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι :

για κάθε $x > \xi$ ισχύει $f(x) > e^x$ και για κάθε $x < \xi$ ισχύει $f(x) < e^x$.

(μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^\xi |f(x) - e^x| dx = \int_\xi^1 |f(x) - e^x| dx$, (1) (μονάδες 4)

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1); (μονάδες 2)

Μονάδες 12

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x) - g'(x)}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} η οποία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- $f(0) = 0$
- $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και
- $x \cdot f'(x) - f(x) = -4x^2 \cdot (1 + \ln|x|)$ για κάθε $x \neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f'(0) = 0$.

Μονάδες 2

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

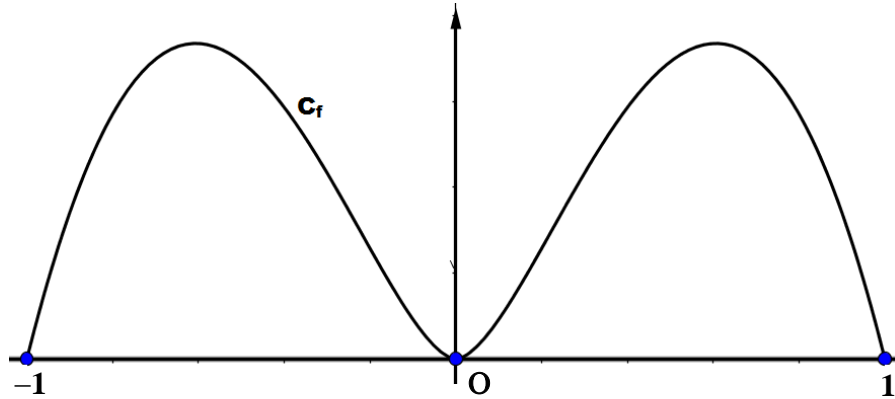
α) $(x \cdot \ln|x|)' = \ln|x| + 1$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 2

$$\beta) f(x) = \begin{cases} -4x^2 \cdot \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Μονάδες 7

Αν η καμπύλη του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-1,1]$,



τότε:

Δ3. α) Να βρείτε τα ακρότατα της f στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$ (μονάδες 4).

β) Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού k , να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\frac{k}{x^2} + 2\ln x^2 = 0$ που ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$.

(μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ4. α) Αφού δικαιολογήσετε ότι η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad a > 0.$$

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι, αν F είναι μια παράγουσα της f στο \mathbb{R} , τότε για κάθε $\beta > 1$ ισχύει:

$$\frac{F(\beta) - F(-1)}{2} < \int_0^1 f(x) dx.$$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1:30 ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ